

モーペルテュイの「作用」、オイラーの「労力」： 十八世紀中葉における二つの最小作用の原理*

有賀 暢 迪**

はじめに

「この原理は解析的に捉えれば、相互に作用する諸物体の系において、質量と速度と通過距離の積が最小だということである」——1788年に出版された『解析力学』の中で、最小作用の原理(Principe de la moindre action)と呼ばれる力学原理はこのように説明されている。著者ラグランジュ(Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813)によれば、この主張が意味するのは

$$\delta \int m v ds = 0 \quad (1)$$

ということであり(m :質量, v :速度, ds :距離要素, δ は変分記号), それ以降今日に至るまで、「最小作用の原理」という言葉はこのような数学的形式に即して理解されてきた¹⁾。ここで使われている変分記号そのものがラグランジュの発明であることを考えれば、この原理の「近代史」はまさにラグランジュとともに始まったと言えることができる²⁾。

これに対し、最小作用の原理の「前近代史」に当たるものは、『解析力学』ではこう語られている。元々、この名を冠した原理はモーペルテュイ(Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698-1759)によって与えられていたが、それをを用いた議論は「曖昧で恣意的」であった。これに対して「より一般的でより厳密な」見方を与えたのがオイラー(Leonhard Euler, 1707-1783)であり、それこそが「唯一数学者の注目に値する」と³⁾。ここには、後に何度も繰り返されることになる物語の原型が表れている。単純化して言えば、モーペルテュイとオイラーは最小作用の原理の悪い定式化と良い定式化を与えた、と

いうのがそれである⁴⁾。

しかしながら、実際にモーペルテュイとオイラーの著作を検討してみると、この二人の仕事單純に比較するのは不可能ではないかと思えてくる。十八世紀における最小作用の原理の展開を詳細に分析したブルテが適切に述べているように、「オイラーとモーペルテュイは互いに独立に、異なる問題から出発して、動力学的作用原理の異なる定式化に辿り着いた」からである⁵⁾。だが、問題はそれだけに止まらない。これまでの研究では明確にされていなかったが、そもそもこの二人は「作用の量」という言葉を異なる意味で使っていた。そしてその結果、最小作用の原理をめぐる両者の議論は一向に噛み合うことがなかったのである。本稿はこの事情を明らかにすることによって、これまで十分に捉えられていなかった両者の間の影響関係を——あるいはむしろ、擦れ違いを——描き出そうとするものである⁶⁾。そしてまた、ひとたびこの点が明らかになれば、二人は同じ原理の異なる定式化を与えたと言うよりも別の原理を提唱したと見なす方が適切であることが分かるであろう。

以下では、モーペルテュイとオイラーの思考の発展を順に辿っていくことによって、十八世紀中葉における二つの最小作用の原理の形成過程を検討していく。これを通じて我々は、二人が「作用の量」という言葉に異なる意味を与えていたこと、両者は互いの研究内容に接しながらもあくまで自分自身の道を進んでいったことを見るであろう。また本稿では、この二人が辿り着いた二つの概念——モーペルテュイの「作用」とオイラーの「労力」——の相違と両者が有していた問題関心の違いとの関わりを指摘することで、今後の指針を提示したい。

1. モーペルテュイ, 1740-44年

1740年、モーペルテュイはパリの科学アカデミーで、「諸物体の静止の法則」と題された論文を発表した。最

* 2008年7月18日受理。

** 京都大学大学院文学研究科 博士後期課程
ariga_phs@yahoo.co.jp

キーワード：最小作用の原理, モーペルテュイ, オイラー, 力学

小作用の原理そのものはここではまだ述べられていないが、そこへと向かう重要な一歩がこの論文の中には見て取れる。その一歩とは、「一見して単純かつ明白な」原理と、それほど自明ではないが「非常に大きな有用性を持つ」原理との対比である⁷⁾。あらゆる科学は究極的には前者の原理からの演繹によって構築されるかもしれないが、それでは目標とする現象までなかなか到達できないとモーペルテュイは言う。そこで後者の原理が必要になるのであり、その一例として提唱されたのが、表題にある「静止の法則」であった。これは具体的には、距離 z の n 乗に比例する中心力(ある点へと向かう力) mfz^n (m : 質量, f : 比例定数)を受けている物体系のつりあいにおいては mfz^{n+1} で与えられる量の総和が最大または最小になるという命題であるが、今はその内容自体はさほど重要でない。注目したいのは、モーペルテュイがここで、自明な原理だけでは力学にとって十分ではないという認識を示し、より様々な現象を扱えるような別種の原理を探究しているという点である。

おそらくはこのような認識こそが、自然学に形而上学的方法を、ひいては最小作用の原理を導入した直接の理由であった。と言うのも、モーペルテュイは四年後の論文で、数学的方法の持つ「確実さ」(sûreté)に「広がり」(étendue)を加えるためには形而上学的方法を併用すべきだと説いているからである⁸⁾。ここで形而上学的方法とは、具体的には、「自然はその効果を生み出す際、常に最も単純な方法 [moyens les plus simples] で作用する」という目的論的な原理に基づいて自然現象を考究することを意味している⁹⁾。

こうした目的因の考え方は、既にフェルマー(Pierre de Fermat, 1601-1665)によって、光学の問題に適用されていた。だがモーペルテュイによれば、光の経路はその通過に要する時間が最小になるようなものだとするフェルマーの主張(最小時間の原理)は、光の速度は媒質が密であるほど大きいという自明な学説(光の粒子説の立場)と相容れない¹⁰⁾。モーペルテュイはそこで、最小なのは通過時間ではなく「作用の量」(quantité d'action)であるという解釈を提示し、この量は通過距離と速度の積を足し合わせたものであると主張した(最小作用の原理)。そして、この量が最小だという要請と光の速度に関する先の学説から、モーペルテュイは屈折の法則を導いて見せている。

自然は単純な方法で作用するという主張そのものは、決して目新しいものではなかった。むしろモーペルテュイの自負は、「単純な方法」という形而上学的概念に「作用の量」という適切な数学的尺度を結び付けたという点にあったのである¹¹⁾。モーペルテュイからすれば、

フェルマーの「失敗」は形而上学的原理を用いたことではなく、「単純な方法」の数学的解釈が不適切だったことに由来していた。速度と距離の積として定義された「作用の量」は、数学的方法と形而上学的方法を結び付ける要として導入されたのである。

2. オイラー, 1742-44年

最小作用の原理につながるオイラーの探究は、モーペルテュイとは独立に、1742年の秋頃に始まった。オイラーはこの年の夏に、プロイセン国王フリードリヒ二世の招聘を受けてサンクトペテルブルクからベルリンに移り住んでいたが¹²⁾、研究のきっかけとなったのはパーゼルに住む友人ダニエル・ベルヌーイ(Daniel Bernoulli, 1700-1782)からの書簡であった¹³⁾。これに引き続く文通の中で、オイラーは弾性曲線と投射体の軌道という二つの問題を、当時「等周問題の方法」と呼ばれていた数学的手法(後の変分法の原型)を用いて解いている¹⁴⁾。この成果はベルヌーイの勧めによって、1744年出版の大著『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』に二つの付録として収録された¹⁵⁾。

ベルヌーイが当初オイラーに持ちかけたのは、弾性を持つ薄板を曲げたときの形状(弾性曲線)を求めるという問題であった¹⁶⁾。ベルヌーイの考えでは、その形状は板の「潜在的な活力」(vis viva potentialis)が最小になるようなものであり、その大きさは $\int ds/R^2$ (R : 曲率半径, ds : 曲線要素)で与えられるとされる。オイラーはこれに答えて、薄板の長さが不変($\int ds$ が一定)という条件下で $\int ds/R^2$ を最小にするような曲線を数学的に決定し、それが既知の弾性曲線の式と一致することを示した(付録1)。こうして、弾性曲線には言わば最小の性質が備わっていることが確かめられたのだが、オイラーの考えでは、そうした性質を持つのは弾性曲線だけに限られない。むしろそれは、自然現象一般に存在するはずのものであった。オイラーはこう述べている。

実際、宇宙はこの上なく完璧で精緻なものであり、極めて聡明な創造主によって仕上げられているのであるから、何らの最大または最小の理も輝きを持たないような世界では、何事も全く起こらないのである¹⁷⁾。

もっとも、大抵の場合、そうした最小の性質が具体的にどのようなものであるかは分からない。弾性曲線に関するオイラーの分析を受け取ったベルヌーイが、「一つの、ないし複数ある力の中心の周りの軌道も、同様に等周問題の方法によって求められるはずです。とは言って

も、自然の好む最大ないし最小は分かりませんが」と書いている通りである¹⁸⁾。だがオイラーは、そうした曲線(軌道)そのものは「直接的な方法によって」——すなわち、通常の力学の原理を用いて——決定できるのだから、何が最小になっているのかをそこから逆に結論できるのではないかと考えた¹⁹⁾。そして実際に、中心力を受けて運動する投射体の軌道は $\int mvds$ (m : 質量, v : 速度) が最小であるという条件から導き出されるということを発見したのである(付録2)²⁰⁾。

二つの付録の根底にあったのは、自然現象は一般に何らかの最小の性質を持つという考えであった。だがオイラーは同時に、「しかしながら、その性質がいったい何であるかを形而上学の原理からアプリアリに定めることはそれほど簡単ではないように思われる」とも述べている²¹⁾。それゆえ、自然に見られる様々な曲線における最小量(最小になっている量)は、問題ごとに、「アポストリアリに」見出さなければならなかった²²⁾。弾性曲線と投射体の軌道における最小量を運良く特定できたとは言え、一般的な原理はまだ遙か遠くにあるように思われた。

3. 擦れ違う二人, 1745 年

モーペルテュイがオイラーと同じくフリードリヒ二世の招きに応じ、改組されたベルリン科学・文学アカデミーの総裁候補としてパリからやってきたのは1745年8月のことであった。新しいアカデミーは翌年正式に発足し、モーペルテュイは総裁に、オイラーは数学部門長に就任することになる²³⁾。だがこれほど近い立場にありながらも、おそらくは性格が全く合わなかったためであろう、この二人が最小作用の原理について直接議論したことはほとんどなかったように思われる²⁴⁾。両者は主に、書簡を通じて意見の交換を行っていた。

1745年12月の書簡で、オイラーはモーペルテュイに「静止の法則」論文を読んだことを伝え、さらに、この法則は一般化が可能だと指摘した²⁵⁾。すなわち、距離の n 乗に比例する力の代わりに一般的な中心力 V, V', V'' 等を考え、物体から各中心へ向かう距離要素を dv, dv', dv'' 等とすれば、この物体系がつりあっているときには

$$\int Vdv + \int V'dv' + \int V''dv'' + \text{etc.} \quad (2)$$

が最大または最小になっている、というのである。この一般的された「静止の法則」は、後のオイラーの仕事において極めて重要な役割を演じることになる²⁶⁾。

オイラーはまた、この「静止の法則」を称賛する中で「至る所で自然は何らかの最大または最小の原理に従って作用する」という自らの持論を述べ、自分もそうした原理から弾性曲線や物体の軌道を導いたと書いている²⁷⁾。

オイラーがここで、モーペルテュイの「静止の法則」を自身の二つの付録と同列に置いて語っているのは明らかであろう。つまりオイラーの眼には、「静止の法則」は「何らかの最大または最小の原理」の一形態であるように映ったのである。

だが、この書簡を受け取ったモーペルテュイは違う点に注意を向けた。それは、自分の与えた「作用の量」(速度と距離の積)に類似した量をオイラーが $\int mvds$ という形で提示していたという事実である。モーペルテュイはこれを最小作用の原理の先取権に関わる事態と受け止め、自分の論文については伏せたまま、貴殿の著書が出版されたのはいつのことかとオイラーに尋ねた²⁸⁾。モーペルテュイにとっては幸いなことに、それは自分の研究発表よりも数ヶ月後のことであった²⁹⁾。

ここで注意すべきなのは、モーペルテュイが問題にしているのは $\int mvds$ という量を扱った「付録2」だけだという点である。現に、この書簡だけでなく後年の著作においても、「付録1」への言及は一切ない。これは、モーペルテュイにとって重要だったのが「速度と距離の積」という「作用の量」の定義であり、それに関係するのが「付録2」だけであったためであろう。だがオイラーにとっては、「付録2」は「付録1」や「静止の法則」と同じく、一般的な最小原理の一形態に過ぎなかった。二人の見解は、この時点で既に擦れ違っている。

4. モーペルテュイ, 1746 年

モーペルテュイは、ベルリン・アカデミーの総裁就任後最初の研究発表「神の諸属性から導かれた運動と静止の諸法則について」(1746年10月6日)で最小作用の原理を取り上げ、その内容を後日、論文として出版した³⁰⁾。モーペルテュイがこの中で試みたのは、最小作用の原理の適用対象を光の粒子から物体一般へと移し、それに基づいて神の存在証明を行うことであった。

モーペルテュイによる神の存在証明の基本的な論理は、神が自然に課した「基本法則」(premières lois)が神の「諸属性」(attributs)の帰結と一致するならば、「それは神が存在することと、彼がこうした法則の起草者 [auteur] であることの最も強力な証明ではないか」というものである³¹⁾。ここに言う神の「諸属性」とは「力」(puissance)と「知恵」(sagesse)のことであり、先の1744年の論文において、前者は物体の運動に、後者はその目的因に関係付けられていた³²⁾。このことと、最小作用の原理が数学的方法(物体の運動の計算)と形而上学的方法(目的因の探究)を結び付けるものであったことを考え合わせると、最小作用の原理には神の「諸属性」が同時に体现されていることになるであろう。した

がって神の存在を証明するには、あらゆる自然現象の基礎にある「基本法則」、具体的には「運動の法則」(Loix du Mouvement)と「静止の法則」(Loix du Repos)が、最小作用の原理から導出されることを示せばよい。

ただし奇妙なことに、ここで「静止の法則」と呼ばれているのは1740年に提示された法則とは別物であり、実質的には槌子の重心位置を決定する規則である³³⁾。前節で見たオイラーの書簡にもかかわらず、モーペルテュイは以前の「静止の法則」には全く言及していない。

また、モーペルテュイがこの論文で「運動の法則」と呼んでいるのは、硬い(dur)物体と弾性的な(élastique)物体という二種類の物体における衝突の法則である。当時の通念では、硬い物体同士の衝突では衝突後の速度が等しくなり、弾性的な物体同士の衝突では二物体の相対速度の大きさが変わらないとされていた³⁴⁾。そしてこの二つの法則をめぐって、十八世紀前半の学者たちは激しい論争を繰り広げていた³⁵⁾。モーペルテュイは最小作用の原理からこの二つの法則を導いて見せているが、これには両者を一つの原理へと統合することで論争を解消しようという意図があったものと考えられる³⁶⁾。

この衝突の法則の議論に先立って、モーペルテュイは最小作用の原理を次のように定式化している。

自然において何らかの変化が起こるときには、その変化に必要な作用の量は、可能な限り少ない。

作用の量とは、諸物体の質量とそれらの速度ならびにそれらが通過する距離の積である³⁷⁾。

以前の1744年の論文と比較すると「作用の量」の定義に質量が追加されているが、これはさほど問題ではない。モーペルテュイが後年、「ここでは物体が一つしかないので、質量を省略している」と注記している通り³⁸⁾、一つの物体(この場合は光の粒子)だけを考えている場合に質量を省略するのはこの時代には普通のことであった。少なくとも、当時の文献でこの点を問題視しているものは見当たらない。ただいづれにせよ、この新しい定義によって「作用の量」とオイラーの $\int mvds$ との類似がいつそう強まったのは確かである。

だがそれでも、オイラーの $\int mvds$ が言わば各瞬間における作用の量の和であるのに対して、モーペルテュイが最小だと主張しているのは「変化に必要な作用の量」である。具体的には、速度 v で運動していた物体(質量 m)が衝突によって速度 v' になったとすれば、この場合の「変化に必要な作用」は瞬間的な速度の変化 $v'-v$ で特徴付けられる。それゆえ「変化に必要な作用の量」は、質量 m 、速度の変化 $v'-v$ 、衝突前後の移動距離の

変化 $v'-v$ (単位時間での移動を考えているため、式は速度の変化と同じになる)から $m(v'-v)^2$ と計算される³⁹⁾。この量は、衝突前後での「作用の量の変化」すなわち $mv'^2 - mv^2$ とも異なることに注意しなければならない⁴⁰⁾。

こうした衝突の問題の取り扱いについて、モーペルテュイは事前に、オイラーに意見を求めていた⁴¹⁾。その返信でオイラーは、速度と通過距離が比例する(同じ式になる)のであれば速度だけを使う方が分かりやすいのではないかという、もっともな指摘をしている⁴²⁾。だがモーペルテュイとしては、以前に提示した「作用の量」の定義に合わせるためにはそうせざるを得なかったに違いない。オイラーの「付録2」を自分の原理の「美しい応用」だと宣言するには⁴³⁾、「作用の量」はあくまで「質量と速度と距離の積」でなければならなかった。

5. オイラー、1748年

先取権の確保に腐心するモーペルテュイの努力をよそに、オイラーの進めていた研究は、1748年に劇的な進展を見ることになった。この年の春、オイラーはモーペルテュイに宛ててこう書いている。

目下のところ私は、数多くの力学曲線についての論文に取り組んでおります。私はそれらをまず力学の諸原理によって決定するのですが、次いでそれらの曲線において最小になる量の表式を探します。これは貴殿が作用の量と名付けておられるものを表す式をそれぞれの場合にアポステリオリに知るためであり、そうすればその式をアプリアリに発見することはますます容易になると思っております⁴⁴⁾。

ここで述べられている研究方法は実質的に「付録2」と同じものであり、その意味でこれは1744年の探究の続きであると言える。ただし今回研究の対象に選ばれたのは、様々な力を受けてつりあっている糸の形状であった⁴⁵⁾。オイラーはこれを「アポステリオリに」——その形状を表す曲線を力学の原理によって求め、次いでその曲線において最小となる量を探するという仕方——で探究し、最も複雑な事例として、 A/r (A :定数、 r :曲率半径)で表される「弾性の力」(force de l'élasticité)を持つ糸が複数の中心力を受けているという問題を取り上げた。その結果判明したのは、この場合には

$$\int ds \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \text{etc.} + A/2rr \right) \quad (3)$$

で表される量(ds :曲線要素)が最小になっているということであった⁴⁶⁾。ここで $\int V dv$ は以前にオイラーが

一般化した「静止の法則」に現れていた量であるが、オイラーはさらに、 $A/2rv$ も $\int Vdv$ と本質的には等価であることを示した⁴⁷⁾。したがって「付録1」で述べられていた事柄—— $\int ds/R^2$ が最小——は、実はこの「静止の法則」の一例であったことになる⁴⁸⁾。

ところで、先に引用した書簡の文面を注意深く読むと、オイラーは「作用の量」という言葉を「質量と速度と距離の積」という意味では使っていないことが分かる。出版された論文でも、オイラーはモーペルテュイの与えた定義には一切言及しておらず、「作用の量」は「何らかの式」によって表されるとしか述べていない⁴⁹⁾。だが、糸の形状の「アポステリオリな」分析から見えてきたのは、そうした「何らかの式」には「静止の法則」が深く関係しているらしいということであった。そしてこの推測は、「付録2」で論じられた最小量 $\int mvds$ が

$$\int dt \left(\int Vdv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \text{etc.} \right) \quad (4)$$

と等価であることの発見(dt :時間要素)によって、確信に変わったと思われる⁵⁰⁾。実際、オイラーはさらに静止流体の形状へと考察を進め、一般に任意の物体について、それがつりあっている場合には

$$\int dS \left(\int Vdv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \text{etc.} \right) \quad (5)$$

が最小になっている(dS :体積要素)と結論することができた⁵¹⁾。要するに、それぞれの問題の最小量は今や、 $\int Vdv$ というただ一つの量から「アプリオリに」導かれることが分かったのである。

オイラーはこうして、「力の作用の量」(quantité d'action des forces)という概念に到達した。これは「[最小となる] あらゆる式の中に入ってくるに違いない」ものであり、「モーペルテュイ氏が幸運にもつりあいの場合において見出した」量であるとされる⁵²⁾。明らかに、オイラーが「力の作用の量」と呼んでいるのは $\int Vdv$ のことであり、モーペルテュイの主張する「質量と速度と距離の積」ではない。おそらく、オイラーはまだモーペルテュイの1744年の論文を見たことがなかったために、モーペルテュイの「作用の量」が本来「静止の法則」とは無関係に導入されたものであることを知らなかったのである⁵³⁾。

こうした経緯からすれば、モーペルテュイがオイラーの言っていることをなかなか理解できなかったのも当然であろう⁵⁴⁾。モーペルテュイが「作用の量」について改めて説明するに及んで、オイラーはようやく自分の誤解に気付き、「率直に認めますが、私は互いに全く異なる多くの式に誤って作用の量という名前を与えていました」と詫びた⁵⁵⁾。だがそれにもかかわらず、オイラーは

モーペルテュイの用語法に従う代わりに、式(2)を「絶対的な作用の量」(quantité d'action absolue)、式(3)(4)(5)のような量を「適用された作用の量」(quantité d'action appliquée)と呼ぶことを逆提案している⁵⁶⁾。オイラーにとっては、今まで論じてきた様々な問題を統一的に、「アプリオリに」扱える $\int Vdv$ という量こそが、「作用の量」と呼ばれるにふさわしいものだったのである。

6. その後の展開

最小作用の原理に関するオイラーの研究は、1753年に出版された論文「モーペルテュイ氏の静止と運動の一般原理のあいだの調和」において、その完成を見た⁵⁷⁾。この論文ではまず、「静止の法則」の一般化が解説され、例の $\int Vdv$ という量が「労力」(effort)という新しい名前の下に導入される。次いでオイラーは、「静止の法則」から「運動の法則」を導出することによってこの二つが「調和」としていると主張し、さらに、「静止の法則」の正しさを多くの静力学の問題で具体的に示して見せた。ここで「運動の法則」と呼ばれているのは、「付録2」で述べられた $\int mvds$ が最小という原理であり、モーペルテュイが自分の原理の「美しい応用」と呼んだものである。オイラーがこの論文で意図したのは、「静止の法則」の正しさと二つの法則の「調和」とを示すことで、間接的に「運動の法則」——モーペルテュイの意味での最小作用の原理——の正しさを示すことであった⁵⁸⁾。

モーペルテュイはこれを見てようやく、自分の「静止の法則」論文に何かしらの意義を認めたようである。1756年に『著作集』を改訂した際、モーペルテュイは初めて1740年の「静止の法則」論文を収録し⁵⁹⁾、オイラーの見解に則った一般化を書き加えた⁶⁰⁾。同時に、1746年の論文にあったもう一つの「静止の法則」の議論は「限定され過ぎていた」として削除されている。だが、オイラーの論文に言及して(1740年の)「静止の法則」と最小作用の原理が完璧に合致していると述べてはいるものの、モーペルテュイは明らかに、そのことに重きを置いていない⁶¹⁾。

1746年以降、モーペルテュイは最小作用の原理を衝突の法則との関連で論じ続けていた。例えば、1758年に出版された最後の論文で、モーペルテュイは六つの「運動の法則」すなわち衝突の法則を列挙している。そしてそのうちの「第六法則」として、硬い物体と弾性的な物体のいずれにも適用できるとして提示されたのが最小作用の原理であった⁶²⁾。モーペルテュイはあくまでも、衝突を念頭に置いて「作用」を語っていたのである。

これに対してオイラーは、衝突の問題に関してモーペ

ルテュイの支持を公言しているものの、衝突の二つの法則の統合という点には触れていないし、それどころか「質量と速度と距離の積」という「作用の量」の定義にすら言及していない⁶³⁾。結局のところ、オイラーは最後までモーペルテュイの「作用の量」を受け入れなかったのである。オイラーからすれば、重要なのはやはり「静止の法則」、あるいは「労力」の概念であった。これは一つには、この概念が力学——特に流体静力学——の数学的理論において中心的な役割を果たしていたためであろう⁶⁴⁾。だが、流体静力学の論文中、「労力」の概念を導入した箇所、オイラーはこう書くことを忘れなかった。「我らが尊敬すべき総裁、モーペルテュイ氏の偉大なる最小作用の原理に基づいているのも、やはりこの同じ[労力の]概念である」⁶⁵⁾。

おわりに

ラグランジュが与えた最小作用の原理の近代的な定式化(式(1))は、少なくとも形式的には、オイラーが「付録2」で投射体の軌道について述べた事柄—— $\int mvds$ が最小——の拡張である。だがこれまで見てきたように、オイラーにとって「付録2」は最小作用の原理の一形態に過ぎなかった。今日でこそ、最小作用の原理は物体系の運動状態を決定する動力学の原理として理解されているが、オイラーにこうした用語法は当てはまらない。オイラーにとってはむしろ、「作用の量」とは第一義的には「力の作用の量」すなわち「労力」のことであり、最小作用の原理を「静止の法則」から切り離すことはできなかった。オイラーにとって最小作用の原理とは、静止においても運動においても「力の作用の量」ないし「労力」が最小であるという主張であったと要約できる。

他方、 $\int mvds$ という式は、モーペルテュイが与えた「作用の量」の定義——質量と速度と距離の積——と見かけ上は整合的である。だが、モーペルテュイ自身が最小だと主張していたのは「変化に必要な作用の量」であり、この「作用」は衝突の際の瞬間的な変化を念頭に置いて述べられていた。加えて、オイラーがあれほど高く評価した「静止の法則」を提唱者のモーペルテュイ自身は重視せず、あくまで最小作用の原理とは別のものとして扱っていた。結局のところ、モーペルテュイにとっての最小作用の原理とは、「変化に必要な作用の量」が最小だということに尽きていたのである。

ラグランジュは『解析力学』において、オイラーの仕事の中から「付録2」だけを切り出し、そこにモーペルテュイの「作用の量」という表現を適用して、二つの最小作用の原理から第三の(近代的な)原理を仕立て上げた⁶⁶⁾。だがそれ以前には、モーペルテュイとオイラーは

それぞれ異なる原理について語っており、二人の主張は擦れ違い続けていたのである。

最後に、本稿の分析から浮かび上がってくる二人の問題関心の違いに改めて注意を促しておきたい。すなわち、モーペルテュイが衝突による瞬間的な速度の変化を問題にし、それに「作用」という言葉を結び付けていたのに対し、オイラーは一貫して外力の連続的な作用を受ける物体の運動・静止を論じ、そうした力の積分として「労力」を定義していたというのがそれである。このことは力学の歴史全体を考える上で重要な意味を持つように思われるが、これについて論じることは本稿の範囲を大きく超えている。だが少なくとも、二つの最小作用の原理に即してこう述べておくことはおそらく許されるであろう。すなわち、モーペルテュイの「作用」とオイラーの「労力」は、二人が力学ないしは自然学の主要な対象と見なしていた問題の違いを象徴するものであった、と。

文献と注

*本稿では、以下の略称を用いる。

LEO 'N'-'M' = *Leonhardi Euleri Opera omnia* (Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, 1911-), ser. 'N', vol. 'M'. この全集に再録されている文献の引用は、原則としてこの版から行う。

HASB 'N' = *Histoire de l'académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin* [pour l'année 'N'] (Akademiebibliothek der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften) (<http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/>) (2008年7月1日確認)。本稿で参照するページ番号は、このうちの“Mémoires”部分に付せられたものである。

HASP 'N' = *Histoire de l'Académie royale des sciences [de Paris] avec les mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de cette Académie* [pour l'année 'N'] (Gallica) (<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/cb32786820s/date>) (2008年7月1日確認)。本稿で参照するページ番号は、このうちの“Mémoires”部分に付せられたものである。

OEM = *Œuvres de Maupertuis*, nouv. éd. corrigée & augmentée (Lyon, 1768; repr., *Oeuvres* [...], 4 vols., Hildesheim : Georg Olms Verlag, 1965-1974)。

1) Joseph-Louis Lagrange, *Mécanique analytique* (Paris, 1788; repr., *Mécanique analytique*,

- Sceaux : J. Gabay, 1989), 引用は p. 188. なお, この原理の数学的定式化に関して言えば, ラグランジュ自身は $\delta \int S m \dot{u} ds = 0$ という表記を使っている (*Ibid.*, p. 211).
- 2) ラグランジュは既に 1760 年前後に変分記号を導入し, それを用いて最小作用の原理に関する研究を行っていた. 山本義隆『古典力学の形成: ニュートンからラグランジュへ』(東京: 日本評論社, 1997 年), 第 15 章を参照.
 - 3) Lagrange, *Mécanique analytique*, p. 188.
 - 4) 代表的な例が, エルンスト・マッハ『マッハ力学史: 古典力学の発展と批判』上下, 岩野秀明訳, ちくま学芸文庫(東京: 筑摩書房, 2006 年)[原書: Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*, 9. Aufl. (Leipzig: Brockhaus, 1933)], 第 3 章第 8 節に見られる.
 - 5) Helmut Pulte, *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik: eine Untersuchung zur Grundlegungsproblematik bei Leonhard Euler, Pierre Louis Moreau de Maupertuis und Joseph Louis Lagrange* (Stuttgart: Steiner, 1989), S. 193. 強調は原文による.
 - 6) 十八世紀における最小作用の原理の歴史については, 上で挙げたプルテの著書(注 5)が最も詳細な研究である. これ以外で, この原理に関するモーペルテュイとオイラーの仕事を論じている比較的最近の研究としては, 次のものがある. J. Christiaan Boudri, *What was mechanical about mechanics: The concept of force between metaphysics and mechanics from Newton to Lagrange*, translated by Sen McGlinn (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002), chap. 5; 山本『古典力学の形成』(注 2)第 14 章; Marco Panza, “De la nature épargnante aux forces généreuses: le principe de moindre action entre mathématique et métaphysique. Maupertuis et Euler, 1740–1751,” *Revue d’histoire des sciences* 48(1995): 435–520.
 - 7) Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, “Loi du repos des corps,” in *LEOO 2–5*, pp. 268–273 [orig. pub. in *HASP 1740* [pub. 1742]: 170–176], p. 268.
 - 8) Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, “Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu’ici paru incompatibles,” in *LEOO 2–5*, pp. 274–281 [orig. pub. in *HASP 1744* [pub. 1748]: 417–426], p. 280.
 - 9) *Ibid.*, p. 277.
 - 10) 今日から見れば, 誤っているのは光の速度に関するこの学説の方であり, フェルマーの主張は正しい.
 - 11) ハンキンスはさらに進んで, モーペルテュイの最小作用の原理をマルブランシュ (Nicolas Malebranche, 1638–1715) の主張を数学的に厳密化したものとして捉えている. Hankins, “The influence of Malebranche on the science of mechanics during the eighteenth century,” *Journal of History of Ideas* 28(1967): 193–210, 該当箇所は pp. 203–205.
 - 12) E. A. フェルマン『オイラー: その生涯と業績』山本敦之訳(東京: シュプリンガー・フェアラーク東京, 2002 年)[原書: Emil A. Fellmann, *Leonhard Euler* (Reinbek: Rowohlt Taschenbuch Verlag, 1995)], 95 頁.
 - 13) 関連するベルヌーイからの書簡は, P. H. Fuss éd., *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle* [...] (St. Pétersbourg, 1843; repr., New York: Johnson Reprint, 1968), t. 2 にある. オイラーの返信は残っていない.
 - 14) オイラーは 1730 年代に等周問題の一般的な理論を発展させていた. Rüdiger Thiele, “Euler and the calculus of variations,” in *Leonhard Euler: Life, work and legacy*, edited by Robert E. Bradley & C. Edward Sandifer (Amsterdam: Elsevier, 2007), pp. 235–254. 該当箇所は pp. 244–245.
 - 15) ベルヌーイは 1743 年 4 月 23 日付の書簡で, 弾性曲線その他の問題を等周問題の著作に付け加えるよう勧めている (Fuss, *Correspondance*, t. 2, p. 524). その結果書かれた付録が, Leonhard Euler, “Additamentum I: De Curvas Elasticis” および “Additamentum II: De motu projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando,” in *LEOO 1–24*, pp. 231–297 および 298–308 [orig. pub. in *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* [...] (Lausannae, Genevae, 1744), pp. 245–310 および 311–320] であった.
 - 16) 1742 年 10 月 20 日付オイラー宛書簡. Fuss, *Correspondance*, t. 2, pp. 505–507.
 - 17) Euler, “Additamentum I,” p. 231: “Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaequam eluceat[...].” ここでは「最大または最小」と書かれているが, オイラーが実際に問題にしていたのは最小だけであったと考えられる. この点については, 有賀暢迪「オイラーの変分力学」『科学史研究』第 45 巻(2006 年), 220–228 頁の議論

を参照せよ。

- 18) 1742年12月12日付オイラー宛書簡, Fuss, *Correspondance*, t. 2, p. 513.
- 19) Euler, "Additamentum II," p. 298.
- 20) 「付録2」ではオイラー独特の記号法が用いられているが, 本稿では一貫して現代の表記に翻訳したものをを用いる。この翻訳の詳細については, 有賀「オイラーの変分力学」(注17)の注29を参照せよ。
- 21) Euler, "Additamentum II," p. 298.
- 22) 「アプリオリ」とは何らかの原理から導かれることを, 「アポステリオリ」は経験や効果から導き出されることを言う。Boudri, *What was mechanical about mechanics* (注6), p. 147, n. 42.
- 23) 改組されたベルリン・アカデミーをめぐる状況については, Mary Terrall, *The man who flattened the earth: Maupertuis and the sciences in the Enlightenment* (Chicago: University of Chicago Press, 2002), chap. 8に詳しい。
- 24) モーペルテュイとオイラーの人間関係については, フェルマン『オイラー』(注12), 148-152頁を見よ。
- 25) 1745年12月10日付モーペルテュイ宛書簡, *LEOO 4A-6*, p. 56.
- 26) この書簡の中では $\int Pdz$ という表記が用いられているが, オイラーは後に $\int Vdv$ という表記を主に用いるようになるので, そちらに合わせておく。
- 27) *Ibid.*, p. 56.
- 28) このことは, それに対するオイラーの返信から知られる(1746年3月14日付モーペルテュイ宛書簡, *Ibid.*, p. 60)。この点については書簡の編者解説も参照せよ。Pierre Costabel, "Introduction," in *LEOO 4A-6*, pp. 4-28, 該当箇所は p. 15.
- 29) モーペルテュイの論文は, 1744年の4月にパリの科学アカデミーで発表された(Terrall, *The man who flattened the earth* (注23), p. 176, n. 12)。他方, オイラー自身がモーペルテュイに証言しているところによれば, 二つの付録は1743年のうちに書かれていたものの, 出版されて世に出たのは翌年の9月頃であった(前掲3月14日付書簡(注28), 同頁)。付録が「1744年の秋に書かれた」というテラルの記述(p. 271, n. 4)は誤りである。
- 30) 出版された論文では, 表題が次の通り変更されている。Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, "Les Loix du Mouvement et du Repos déduites d'un Principe Metaphysique," in *LEOO 2-5*, pp. 282-302 [orig. pub. in *HASB 1746* [pub. 1748]: 267-294]。なお, 発表の表題(Sur les loix du mouvement et du repos déduites des attributs de Dieu)と日付はアカデミー議事録の記述に基づく。Eduard Winter & Maria Winter hg., *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746-1766: Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin, zum 250. Geburtstag* (Berlin: Akademie-Verlag, 1957), S. 103.
- 31) Maupertuis, "Les Loix du Mouvement et du Repos," p. 290.
- 32) Maupertuis, "Accord de différentes loix," p. 280.
- 33) Maupertuis, "Les Loix du Mouvement et du Repos," pp. 301-302.
- 34) 強いて現代の物理学の用語で言えば, 硬い物体の衝突は完全非弾性衝突に, 弾性的な物体の衝突は完全弾性衝突に相当する。「硬い」という言葉の意味合いは, 現代とはかなり異なる。
- 35) この論争については, Wilson L. Scott, *The conflict between atomism and conservation theory, 1644-1860* (London: Macdonald & Co.; New York: Elsevier, 1970), book Iに詳しい。
- 36) *Ibid.*, p. 72.
- 37) Maupertuis, "Les Loix du Mouvement et du Repos," p. 298: "Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d'Action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible. / La Quantité d'Action est le produit de la Masse des Corps, par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent." 強調は原文による, " / "は改行を表す。
- 38) *OEM*, t. IV, p. 17.
- 39) モーペルテュイはこのような考え方に基づいて, 二物体の衝突における「変化に必要な作用の量」を計算している。Maupertuis, "Les Loix du Mouvement et du Repos," pp. 298-301.
- 40) 最小作用の原理を批判したダルシー(Patrick d'Arcy, 1725-1779)が, このような誤解をしていた。モーペルテュイは, ダルシーは「作用の量の変化と速度の変化を混同している」と反論している。Patrick d'Arcy, "Réflexions sur le principe de la moindre action de M. de Maupertuis," *HASP 1749* [pub. 1753]: 531-538, 特に pp. 533-534; Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, "Réponse à un mémoire de M. d'Arcy inséré dans le volume de l'académie royale des sciences de Paris pour l'année 1749," *HASB 1752* [pub. 1754]: 293-298, 引用は p. 296.
- 41) オイラー全集に収録されていないこの書簡(1746年5月22日付)については Terrall, *The man who flattened the earth* (注23), p. 270を見よ。
- 42) 1746年5月24日付モーペルテュイ宛書簡。

- LEOO* 4A-6, pp. 63-64.
- 43) Maupertuis, “Les Loix du Mouvement et du Repos,” p. 282.
- 44) 1748年4月26日付モーペルテュイ宛書簡。
LEOO 4A-6, p. 102: “Je travaille actuellement à une piece sur un grand nombre de courbes mechaniques, que je determine premierement par les principes de mechanique, mais ensuite je cherche les expressions dont les valeurs deviennent un *minimum* dans ces memes courbes, pour connoitre *a posteriori* dans chaque cas les formules qui representent ce que Vous nommes la quantité d’action et je crois qu’il sera alors d’autant plus facile de decouvrir ces memes formules *a priori*.”
- 45) これは最終的に、次の論文にまとめられた。
Leonhard Euler, “Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les action des forces,” in *LEOO* 2-5, pp. 1-37[orig. pub. in *HASB* 1748[pub. 1750]: 149-188].
- 46) *Ibid.*, p. 35.
- 47) *Ibid.*, pp. 36-37.
- 48) $\int ds/R^2$ は定数部分を除けば $\int(A/2rr)ds$ と同じ形をしていることに注意せよ。オイラーはこの論文で明示的に「付録1」に言及している(*Ibid.*, p. 3).
- 49) *Ibid.*, pp. 1-2.
- 50) オイラーは1748年5月9日付のモーペルテュイ宛書簡でこの発見を知らせ(*LEOO* 4A-6, p. 108), 次の論文でその内容を説明している。Leonhard Euler, “Réflexions sur quelques loix générales de la nature qui s’observent dans les effets des forces quelconques,” in *LEOO* 2-5, pp. 38-63[orig. pub. in *HASB* 1748[pub. 1750]: 189-218], 該当箇所は pp. 55-56 および 62-63. これは後の論文では、「静止の法則」と「運動の法則」の「調和」として提示される事柄である(本稿第6節).
- 51) *Ibid.*, p. 57.
- 52) *Ibid.*, p. 39.
- 53) 実際、1748年の一連の書簡と二つの論文(注45および50)には、モーペルテュイが1744年の論文(注8)で扱った光学の問題への言及が一切無い。オイラー全集の編者は前者の二つの論文に付した脚注で後者を参照するよう指示しているが、これは不適切であろう。
- 54) オイラーは「静止の法則」についての説明をモーペルテュイに対して何度も繰り返している(関連する書簡の日付は、1748年5月8日、5月9日、6月4日、6月8日)。モーペルテュイからの書簡は残っていない。
- 55) 1748年6月8日付モーペルテュイ宛書簡。
LEOO 4A-6, p. 115. 書簡の編者は、ここで問題となっているのは質点から質点の集まりへの移行ならびに静止から運動への移行だと注記しているが(*Ibid.*, p. 117, n. 2), 筆者の見解では、問題は「作用の量」という言葉の意味そのものであったと思われる。
- 56) *Ibid.*, p. 116.
- 57) Leonhard Euler, “Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. de Maupertuis,” in *LEOO* 2-5, pp. 152-176[orig. pub. in *HASB* 1751[pub. 1753]: 169-198].
- 58) ただし、有賀「オイラーの変分力学」(注17)の議論に従えば、オイラーの言う「調和」は成り立っていないと考えられる。
- 59) Giorgio Tonelli, “Introduction,” in *OEM*, t. I, pp. XI*-LXXXIII*, 該当箇所は p. XIV*, n. 12. 『著作集』はこれ以前にも1752年と1753年に編まれていたが、「静止の法則」論文は入っていない。なお、モーペルテュイが1740年の「静止の法則」に言及したのはおそらくダルシーの批判に反論した論文が最初であり、そこでは同時にオイラーの「調和」論文(注57)にも言及されている。Maupertuis, “Réponse à un mémoire de M. d’Arcy”(注40), p. 298.
- 60) *OEM*, t. IV, pp. 63-64. この版(1768年版のリプリント)は誤植等の訂正を除き、1756年の版と同じ内容である。
- 61) *OEM*, t. I, pp. xxxv-xxxvi.
- 62) Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, “Examen philosophique de la preuve de l’existence de Dieu employée dans l’Essai de Cosmologie,” in *HASB* 1756[pub. 1758]: 389-424, 「運動の法則」の一覧は p. 423 にある。なお、他の法則は順に、(1)硬い物体の衝突法則、(2)弾性的な物体の衝突法則(以上二つについては本稿第4節を参照)、(3)重心運動の保存、(4)運動の量の保存(デカルトの学説)、(5)活力の保存(ライプニッツの学説)である。
- 63) Leonhard Euler, “Lettres à une princess d’Allemagne sur divers sujets de physique & de philosophie,” in *LEOO* 3-II & 12[orig. pub. in St. Pétersbourg, 1768-1772], vol. 11, pp. 169-171. なお、モーペルテュイの名前は出てこないが、同じ趣旨の事柄は既に “Recherches sur l’origine des forces,” in *LEOO* 2-5, pp. 109-131[orig. pub. in *HASB* 1750[pub. 1752]: 109-131], §26 で述べられている。
- 64) Leonhard Euler, “Principe généraux de l’état

d'équilibre des fluides," in *LEOO 2-12*, pp. 2-53 [orig. pub. in *HASB 1755* [pub. 1757]: 217-273]. この論文では§ 32で「労力」という用語が導入され、その後の理論展開に使われている。この文脈では、「労力」は今日のポテンシャルエネルギーと等価である。

65) *Ibid.*, p. 15.

66) ただし、ラグランジュも当初はオイラーの考え方を踏襲し、最小作用の原理を静力学と動力学の両方に即して理解していたようである。有賀暢迪「オイラーとラグランジュ：最小作用の原理から『解析力学』へ」『科学史研究』第46巻(2007年), 185-187頁を見よ。

Résumé

Maupertuis's "Action" and Euler's "Effort":
Two Principles of Least Action in the Mid-Eighteenth Century

Nobumichi ARIGA

The principle of least action owes its modern formulation to Lagrange(1736-1813), who also related its "pre-modern" history in his *Mécanique analytique*(1788): Maupertuis(1698-1759) treated it in an ambiguous manner, while Euler(1707-1783) formulated it more precisely. Recent historical studies have shown, however, the difficulty of maintaining this narrative, for these two scholars departed from *different* problems and reached at *different* formulations of the principle. In general agreement with these views, this paper emphasizes a further, crucial distinction between Maupertuis and Euler—their usage of the term "quantity of action." When Maupertuis spoke of "quantity of action," he referred to a product of mass, velocity and distance, and his main concern was with the instantaneous change of two bodies colliding. Euler, on the other hand, investigated various "mechanical curves" under the continuous action of forces, searching for a quantity which was minimum to these curves. He realized then that these minimum quantities could be derived from a single one, which he named "effort." Euler did not accept Maupertuis's definition of the "quantity of action" but identified it with the "effort." Although Euler had acquired the idea of "effort" from Maupertuis's earlier work on the "law of rest," Maupertuis himself did not appraise it so highly. They disagreed over what "quantity of action" meant, and their disagreement was related to the kind of physical problems with which they were concerned; before Lagrange's modern formulation, there were two quite distinct principles of least action.